შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

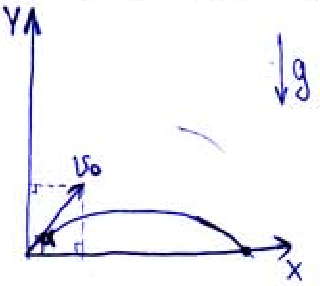
შესარჩევი ტურები ფიზიკის 42-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

01.05.2011/ ფიზ/ IV/ 780

ამოცანა № 1

გვერდი № 1



$x(t) = v_{0x} \cdot t = v_0 t \cos\alpha$ სადაც x ღერძზე თანაბრად მოძრაობს.

$y(t) = v_{0y} t - \frac{gt^2}{2} = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$ სადაც საწყისი სიჩქარით $v_0 \sin\alpha$,

და თანაბარაჩქარებულად ($-g$ აჩქარებით) მოძრაობს.

ფრენის დრო არის $T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$.

$$f(t) \equiv S^2(t) = x^2(t) + y^2(t)$$

$S(t)$ იყოს t დროის შემდეგ დაშორება $(0;0)$-დან (ანუ $\sqrt{x^2+y^2}$) ხოლო $f(t) = S^2(t)$.
ანუ გვინდა ვიპოვოთ ისეთი α, რომ $S(t)$ იყოს ზრდადი $t \in [0;T]$ ანუ
$f(t)$ უნდა იყოს ზრდადი $t \in [0;T]$.

$$f(t) = v_0^2 t^2 \cos^2\alpha + \left(v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}\right)^2 = \left(v_0^2 t^2 \cos^2\alpha + v_0^2 t^2 \sin^2\alpha\right) + \frac{g^2 t^4}{4} - v_0 g t^3 \sin\alpha = v_0^2 t^2 + \frac{g^2 t^4}{4} - v_0 g t^3 \sin\alpha.$$

$f(t)$-ს ზრდადობა ნიშნავს $f'(t) > 0 \quad t \in [0;T]$

$$f'(t) = 2v_0^2 t + g^2 t^3 - 3v_0 g t^2 \sin\alpha > 0$$

ანუ უნდა სრულდებოდეს პირობა: $\forall t \in [0;T]$

$$2v_0^2 t + g^2 t^3 - 3v_0 g t^2 \sin\alpha > 0$$

$$\sin\alpha < \frac{2v_0^2 t + g^2 t^3}{3v_0 g t^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\sin\alpha < \frac{2v_0}{3gt} + \frac{gt}{3v_0}}$$

თუ დავაკვირდებით $\frac{2v_0}{3gt} \cdot \frac{gt}{3v_0} = \frac{2}{9} = \text{const}$ რადგან ორი რიცხვის ნამრავლი მუდმივია, მათი ჯამი მცირდება, როცა სხვაობა მცირდება და მინიმუმს აღწევს, როცა ტოლდებიან ტოლია. ვნახოთ რისი ტოლია t, როცა ეს ორი რიცხვი ტოლდება ერთის:

$\frac{2v_0}{3gt} = \frac{gt}{3v_0} \Rightarrow g^2 t^2 = 2v_0^2 \Rightarrow t = \sqrt{2}\frac{v_0}{g}$. ანუ $\sin\alpha < \frac{2v_0}{3g \cdot \sqrt{2}\frac{v_0}{g}} \cdot 2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ მაგრამ ეს მაშინ, როცა $\sqrt{2}\frac{v_0}{g} < T \Leftrightarrow \sqrt{2}\frac{v_0}{g} \leq \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \Leftrightarrow \sin\alpha \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. ანუ მივიღეთ, ერთ-ერთი პასუხი: $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow 45° \leq \alpha \lesssim 70{,}53°$. ახლა ვნახოთ შემთხვევა,

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები ფიზიკის 42-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

01.05.2011/ ფიზ/ IV/ 780

ამოცანა № 1

გვერდი № 2

როცა $\sqrt{2}\frac{v_0}{g} < T$ ანუ $\sin\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$. მაშინ როგორც ვთქვი, $\frac{2v_0}{3gt}$ და $\frac{gt}{3v_0}$ უნდა იყოს ტოლობიდან რაც შეიძლება ახლოს. აქ დავუშვათ რომ $\frac{2v_0}{3gt}$ კლებადი (უსასრულობიდან 0-საკენ მიდის) ხოლო $\frac{gt}{3v_0}$ ზრდადი (0-დან $+\infty$-კენ მიდის) და მაშინ, თუ 0-დან T-მდე $\frac{2v_0}{3gt}$ კლებულობს ხოლო $\frac{gt}{3v_0}$ იზრდება, თან ტოლობიდან შორდებიან ან ხდებიან ახლოს, ტოლობას უახლოვდებიან. შესაბამისად მათ შორის მაქსიმალური სხვაობა იქნება $t = T = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}$. ანუ:

$$\sin\alpha < \frac{2v_0}{3g\cdot\frac{2v_0\sin\alpha}{g}} + \frac{g\cdot\frac{2v_0\sin\alpha}{g}}{3v_0} = \frac{1}{3\sin\alpha} + \frac{2\sin\alpha}{3}$$

$$\frac{\sin\alpha}{3} < \frac{1}{3\sin\alpha} \Rightarrow |\sin\alpha| < 1$$

ანუ აქ $\sin\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow |\sin\alpha| < 1$. ~~ზოგადად~~ ყოველთვის სრულდება უტოლობა ამ შემთხვევაში. მაშინ საბოლოო პასუხი იქნება:

$$0 < \alpha < \arcsin\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

მიახლოებით:

$$0 < \alpha < 70{,}53^\circ.$$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

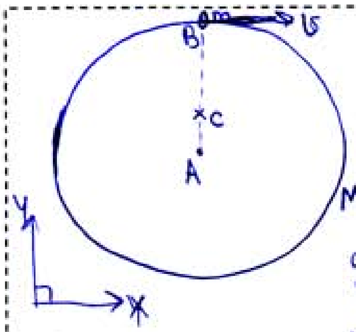
შესარჩევი ტურები ფიზიკის 42-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

01.05.2011/ ფიზ/ IV/ 780

ამოცანა № 2

გვერდი № 1

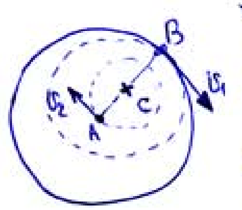


C იქნება სისტემის მასათა ცენტრი. რადგან სისტემა ჩაკეტილია, (ხახუნი არ გვაქვს) C წერტილი წრფივად და თანაბრად მოძრაობს. (A წერტილი რგოლის მასათა ცენტრია.)

x ღერძი იყოს თავდაპირველად მძივის მიერ მიღებული სიჩქარის მიმართულება. y ღერძი კი მისი მართობული. მაშინ $v_{Cx} = \frac{mv+M\cdot 0}{m+M} = \frac{m}{m+M}v$.

ხოლო $v_{Cy}=0$. თუ $AB=r$, მაშინ $AC=\frac{m}{m+M}r$, ხოლო $BC=\frac{M}{m+M}r$. ეხლა ნებისმიერი მომენტისათვის AB მუდმივია, შესაბამისად AC და BC-ც მუდმივებია. ვხედავთ, რომ სისტემა გადაადგილდება მოძრაობის ასეთი სახით $v_{C} = v_{Cx} = \frac{m}{m+M}v$ სიჩქარით და თუ გადავალთ ათვლის ინერციულ სისტემაში სადაც C წერტილი, მაშინ მძივის მასური B წერტილი მის გარშემო მოძრაობს BC რადიუსის წრეწირზე, ხოლო რგოლი თავისი მასათა ცენტრით A-თი მოძრაობს C-ს გარშემო ასევე წრეწირზე -AC რადიუსით.

ვთქვათ C-ს მიმართ რგოლის სიჩქარეა v_2, ხოლო მძივის მიერ - v_1.



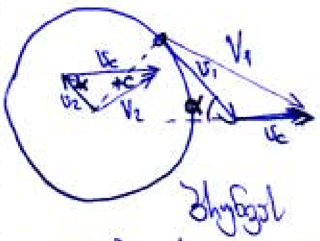
რადგან მათი მასათა ცენტრები C-ს მიმართ ყოველთვის დიამეტრულად მათ მოძრაობს კუთხური სიჩქარე ტოლი ანუ $\omega_1=\omega_2$ (ეს შეგვიძლია ასეც მივიღოთ, რომ $\varphi_2=\varphi_1+180^\circ \Rightarrow \varphi_2'=\varphi_1' \Rightarrow \omega_1=\omega_2$)

$$v_1 = \omega_1\frac{M}{m+M}r \Rightarrow \frac{v_1}{M}=\frac{\omega_1 r}{m+M}$$

$$v_2 = \omega_2\frac{m}{m+M}r \Rightarrow \frac{v_2}{m}=\frac{\omega_2 r}{m+M}$$

$$\omega_1=\omega_2$$

$$\Rightarrow \frac{v_1}{M}=\frac{v_2}{m} \Rightarrow v_2=\frac{m}{M}v_1.$$



დავუბრუნდეთ საწყის ათვლის სისტემას. მაშინ მძივის რგოლის მიმართ სიჩქარე $\bar{V}_1=\bar{v}_1+\bar{v}_c$ ხოლო რგოლის - $\bar{V}_2=\bar{v}_2+\bar{v}_c$. შევნიშნოთ, რომ რადგან მძივსა და რგოლს შორის არ გვაქვს ხახუნი, რგოლი მოძრაობს არ ღებულობს თავის ღერძის A-ს გარშემო, შესაბამისად A-ს მიმართ მოძრაობს იქნება O იქნება) რადგან $\bar{v}_1 \parallel \bar{v}_2$ (ოღონდ საპირისპირო მიმართულებით) კუთხე $\bar{v}_2$ და $\bar{v}_c$-ს შორის თუ აღვნიშნავთ α-თი, კუთხე $\bar{v}_1$ და $\bar{v}_c$-ს შორის იქნება $180-\alpha$. შესაბამისად:

$V_1^2 = v_c^2 + v_1^2 + 2v_c v_1 \cos\alpha \qquad V_2^2 = v_c^2 + v_2^2 - 2v_c v_2 \cos\alpha.$

სადაც ხახუნი არ გვაქვს, ვწერთ ენერგიის მუდმივობის კანონს შემდეგნაირად:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mV_1^2}{2} + \frac{MV_2^2}{2}$$

$$m v_c^2 + m v_1^2 + 2v_c(mv_1)\cos\alpha + Mv_c^2 + Mv_2^2 - 2v_c(Mv_2)\cos\alpha = mv^2$$

$(mv_1 = Mv_2)$

$$2v_c\cos\alpha(mv_1 - Mv_2) + (m+M)\cdot\left(\frac{m}{m+M}v\right)^2 + mv_1^2 + M\cdot\frac{m^2}{M^2}v_1^2 = mv^2$$

$$\frac{m^{\cancel{2}} v^2}{m+M} + \cancel{m}v_1^2\cdot\frac{M+m}{M} = \cancel{m}v^2$$

$$v^2\left(1 - \frac{m}{m+M}\right) = v_1^2\cdot\frac{M+m}{M}$$

$$v_1^2 = v^2\cdot\left(\frac{M}{M+m}\right)^2 \Rightarrow \boxed{v_1 = \frac{M}{M+m}v}$$

ჩვენ ვიცით α კუთხე ვიპოვოთ, როცა V_1 იქნება მინიმალური და სადაც $\bar{V_1} = \bar{v_1} + \bar{v_c}$,
ამიტომ $\bar{v_1}$ და $\bar{v_c}$ კუთხე იქნება საპირისპირო მიმართულების ანუ $\min(V_1) = \left|\frac{M-m}{M+m}\right|$

მოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

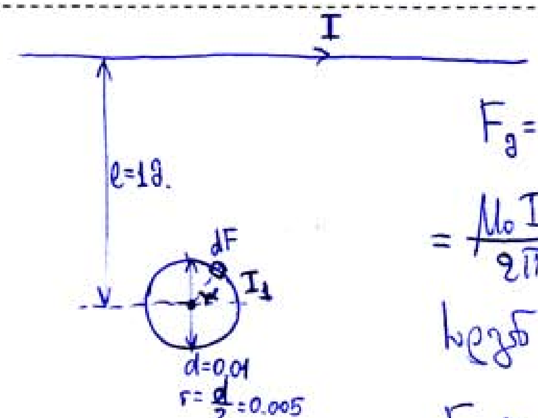
შესარჩევი ტურები ფიზიკის 42-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

01.05.2011/ ფიზ/ IV/ 780

ამოცანა № 3

2)



ვთქვათ ხვიაში I_1 დენი გადის. მაშინ

$$F_მ=\int dF=\int_0^{2\pi} I'B(\alpha)\cdot(r d\alpha)=I'\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 I\, r d\alpha}{2\pi(l-r\sin\alpha)}=\frac{\mu_0 I I' r}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\alpha}{l-r\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\mu_0 I I' r}{2\pi l}\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{r}{l}\sin\alpha\right)^{-1}d\alpha.$$

რადგან $\left|\frac{r}{l}\cdot(-1)\right|<<1$ ამიტომ:

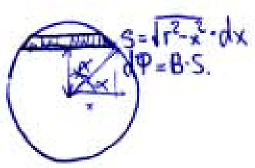
$$F_მ\simeq\frac{\mu_0 I I' r}{2\pi l}\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{r}{l}\sin\alpha\right)d\alpha=\frac{\mu_0 I I' r}{2\pi l}\left(2\pi+\frac{r}{l}\int_0^{2\pi}\sin\alpha\, d\alpha\right)=$$

$$=\frac{\mu_0 I I' r}{2\pi l}\left(2\pi+\frac{r}{l}\left(-\cos 2\pi+\cos 0\right)\right)=\frac{\mu_0 I I' r}{l}$$

1) $\Phi=LI' \Rightarrow I'=\frac{\Phi}{L}$. ე.ი. უნდა ვიპოვოთ მხოლოდ Φ.

რადგან აქ სიმეტრიის მიხედვით ხვიის დენით შექმნილი მაგნიტური ველი,

$$\Phi=\int_{-r}^{r}B(x)2\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\int_{-r}^{r}\frac{\mu_0 I\cdot 2}{2\pi(x+l)}\sqrt{r^2-x^2}\,dx\ \cancel{=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{-r}^{r}\left(\frac{r^2}{x^2}-1\right)^{\frac12}dx}$$



$$\Phi=\frac{\mu_0 I}{\pi}\int_{-r}^{r}\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{x+l}dx=\cancel{\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r\sin\alpha}{r\cos\alpha+l}d(r\cos\alpha)}=$$

$\cancel{x=r\cos\alpha}$

$$\Phi=\int_0^{2\pi}B(x)\cdot 2r\cos\alpha\cdot d\alpha=\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 I\cdot 2r\cos\alpha}{2\pi(l+r\sin\alpha)}d\alpha=\frac{\mu_0 I r}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\alpha}{l+r\sin\alpha}d\alpha=$$

$$=\frac{\mu_0 I r}{\pi l}\int_0^{2\pi}\cos\alpha\cdot\left(1+\frac{r}{l}\sin\alpha\right)^{-1}d\alpha\approx\frac{\mu_0 I r}{\pi l}\int_0^{2\pi}\cos\alpha\left(1-\frac{r}{l}\sin\alpha\right)d\alpha=$$

$$=\frac{\mu_0 I r}{\pi l}\left(\int_0^{2\pi}\cos\alpha\, d\alpha-\frac{r}{4l}\int_0^{2\pi}\sin 2\alpha\, d(2\alpha)\right)=\frac{\mu_0 I r}{\pi l}\left((-\sin\alpha)\Big|_0^{2\pi}-\frac{r}{4l}\int_0^{\pi}\sin\alpha\, d\alpha\right)=$$

$$=\frac{\mu_0 I r}{\pi l}\left(0+\frac{r}{4l}\cdot 1\right)=\frac{\mu_0 I r^2}{4\pi l^2}.\qquad I'=\frac{\mu_0 I r^2}{4\pi l^2 L}$$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები ფიზიკის 42-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

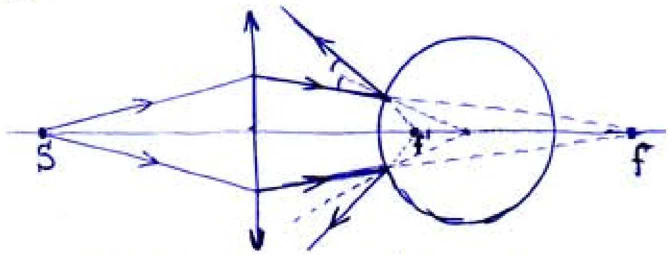
01.05.2011/ ფიზ/ IV/ 780

ამოცანა № 4

გვერდი № 1

ვთქვათ S-დან ლინზამდე მანძილია d. მაშინ $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$. განვიხილოთ 3 შემთხვევა.

1) $f > L-R$ ~~თუ $\frac{1}{f}<\frac{1}{L}$ ანუ $\frac{1}{F}-\frac{1}{d}<\frac{1}{L} \Leftrightarrow \frac{1}{d}>\frac{1}{F}-\frac{1}{L} \Leftrightarrow d>\frac{FL}{L-F}$~~



სხივები ნახევარსფეროდან აირეკლებიან ისე, რომ გვეგონება f' წერტილიდან მოდიან. ანუ უნდა სრულდებოდეს ტოლობა:

$$\frac{1}{f'}+\frac{1}{d}=\frac{1}{F} \Rightarrow f'=f$$ მაგრამ,

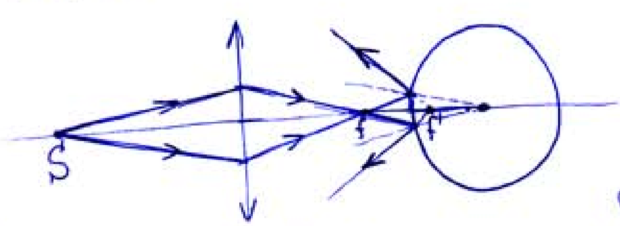
თუ $f<L$, მაშინ $f'>L$, ხოლო თუ $f>L$, მაშინ $f'<L$ (ეს ეკრანისთვის სურათზეა ნაჩვენები). მაშინ, f-იც და f'-იც უნდა ემთხვეოდეს O-ს და მაშინ სხივები უკან იგივე გზით წავლენ, რა გზითაც მოვიდნენ, ანუ $f=f'=L$.

მაშინ ~~$d=\frac{f-F}{fF}=\frac{L-F}{LF}$ ეს არის შევნიშნოთ, რომ აუცილებელია $L<F$.~~

~~2) $f<L-R$ ეს არის ნიშნავს, რომ~~

$$d=\frac{fF}{f-F}=\frac{LF}{L-F}.$$ შევნიშნოთ, რომ $L<F$ პირობა აუცილებელია.

2) $f<L-R$.



ამ შემთხვევაში, პარალელური სხივების გაგრძელებები იკვეთება სადაც f' წერტილში. ამიტომ ეს სხივები შეიკრიბება d წერტილში ისე, რომ $\frac{1}{f'}+\frac{1}{d}=\frac{1}{F}$, მაგრამ როგორც ვიცით, $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F} \Rightarrow f'=f$, მაგრამ ეს შეუძლებელია, რადგან $f>L-R$ უთანასწორობა, ხოლო $f<L-R$.

ამიტომ ერთადერთი ამონახსნია $d=\frac{LF}{L-F}$. მაშინ, თუ $L<F$. თუ $L\geq F$, ასეთი მდებარეობა (d) არ არსებობს.